統計的な推測 (2)

ここでは,

- 確率変数の独立
- 期待値，分散の性質
- 二項分布

について理解していきましょう。

基本 1　確率変数の独立

(1)　同時分布

ある試行によって X，Y の値が定まるとき，$X=a$ かつ $Y=b$ である確率を $P(X=a,\ Y=b)$ と表す。

2 つの確率変数 X，Y について，X のとり得る値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n，Y のとり得る値が y_1，y_2，$\cdots$，y_m であるとする。

$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$ とおくと，X，Y の確率分布は次のように表される。

X ＼ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$		$\cdots\cdots\cdots$			$\vdots$
$\vdots$		$\cdots\cdots\cdots$			$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	p_n
計	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	1

この対応を X と Y の同時分布という。

(2)　独立

(i)　確率変数 X と Y の独立

2 つの確率変数 X，Y において，X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b について，$P(X=a,\ Y=b)=P(X=a)P(X=b)$ が成り立つとき，X と Y は互いに独立であるという。

(ii)　事象 A と B の独立

2 つの事象 A と B において，$P_A(B)=P(B)$ が成り立つとき，事象 A と事象 B は互いに独立であるという。

条件付き確率の定義から，

事象 A と事象 B は互いに独立 $\iff$ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

基本 2　期待値，分散の性質

X，Y は確率変数，a，b は定数とする。

(1)　期待値の性質

(i)　和の期待値

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$　…………………………………… ①
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

(ii)　積の期待値

- X と Y が独立ならば，$E(XY)=E(X)E(Y)$　…………………… ②

(2)　分散の性質

- X と Y が独立ならば，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$　…………………… ③
- X と Y が独立ならば，$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

証

①，②，③の証明。次の分布に従う X，Y についての例。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

このとき，

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= (x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22} \\ &= \{x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})\}+\{y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\} \\ &= (x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y_2q_2) \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

また，X，Y が独立ならば，

$$\begin{aligned} E(XY) &= x_1y_1p_{11}+x_1y_2p_{12}+x_2y_1p_{21}+x_2y_2p_{22} \\ &= x_1y_1p_1q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_1p_2q_1+x_2y_2p_2q_2 \\ &= (x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

さらに，これより，

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2)-\{E(X+Y)\}^2 \\ &= E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2)+\underline{2E(XY)}+E(Y^2)-\{E(X)\}^2\underline{-2E(X)E(Y)}-\{E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2)-\{E(X)\}^2+E(Y^2)-\{E(Y)\}^2 \\ &= V(X)+V(Y) \end{aligned}$$

基本 3　二項分布

(1)　二項分布

1 回の試行で事象 A が起こる確率が $p\ (0<p<1)$ のとき，この試行を n 回行う反復試行において，A の起こる回数を X とすると，$X=r\ (r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ になる確率は

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}\quad (q=1-p)$$

このとき，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うという。

(2)　二項分布の平均，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，

- 平均　　$\cdots$　$E(X)=np$
- 分散　　$\cdots$　$V(X)=npq$
- 標準偏差　$\cdots$　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

証

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とし，$q=1-p$ としておく。

この試行を n 回繰り返すとき，第 k 回目の試行で A が起こる回数を X_k とすると，X_k は 1 または 0 の値をとる確率変数であり，右の分布に従う。

X_k	1	0	計
P	p	q	1

よって，

$$\begin{aligned} E(X_k)&=1\cdot p+0\cdot q\\ &=p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X_k)&=(1-p)^2\cdot p+(0-p)^2\cdot q\\ &=q^2p+p^2q\\ &=pq \end{aligned}$$

A が起こる回数 X は，$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ と表されるので，

$$\begin{aligned} E(X)&=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)\\ &=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\\ &=np \end{aligned}$$

さらに，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は独立であるから，

$$\begin{aligned} V(X)&=V(X_1+X_2+\cdots+X_n)\\ &=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\\ &=npq \end{aligned}$$

1・A

袋の中に赤球が 2 個，白球が 8 個入っている。この袋から，A が最初に 1 個の球を取り出し，残りから B が 2 個の球を同時に取り出す。A，B の取り出した赤球の個数を X，Y とするとき，X と Y の同時分布を求めよ。

2・A

1 つのサイコロを 2 回投げて，1 回目，2 回目に出た目の数をそれぞれ X，Y とする。確率変数 X，Y について，期待値 $E(3X+Y)$，$E(XY)$，および，分散 $V(2X-Y)$ を求めよ。

3・A

硬貨を 100 回投げるとき，表の出る回数を X とする。

X の期待値 $E(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

4・B

1つのサイコロを続けて2回投げて，出た目を順に m，n とする。m が奇数となる事象を A，$mn \leqq 4$ となる事象を B，$m+n$ が偶数となる事象を C とする。次の事象は独立であるか，従属であるか調べよ。

(1)　A と B

(2)　B と C

5・B

1から9までの番号を書いた9枚のカードがある。この中から，1枚のカードを取り出し，番号を確認して元に戻すという操作を3回繰り返し，取り出された順にカードの番号を a，b，c とする。百の位を a，十の位を b，一の位を c として得られる3桁の数を N とするとき，N の期待値 $E(N)$，分散 $V(N)$ を求めよ。

6・B

数直線上の原点に点Pがある。赤球が1個，白球が2個が入った袋から，無作為に1個の球を取り出し，赤球が出たら $+3$ だけ，白球が出たら -1 だけ点Pを動かす。この操作を300回続けて行うとき，Pの X 座標の期待値と分散を求めよ。

7・C

1，2，3，4，5，6 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードを袋の中に入れる。この袋の中から 2 枚のカードを同時に取り出し，それらのカードの数の大きい方を X，小さい方を Y とする。

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2) 確率変数 X と Y は互いに独立であるか，独立でないか，答えよ。

(3) 確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ を求めよ。

8・C

n 個のサイコロを同時に投げる。5 以上の目が出たサイコロだけをもう 1 度投げ，このとき出た目の合計を X とする。X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$ を求めよ。

9・C

座標平面上の点 P の移動を大小 2 つのサイコロを同時に投げて決める。大きいサイコロの目が 1 または 2 のとき，P を x 軸の正の方向に 1 だけ動かし，その他の場合は x 軸の負の方向に 1 だけ動かす。さらに，小さいサイコロの目が 1 のとき，P を y 軸の正の方向に 1 だけ動かし，その他の場合は y 軸の負の方向に 1 だけ動かす。

最初，点 P が原点にあり，この試行を n 回繰り返した後の点 P の座標を $(x_n,\ y_n)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) x_n の平均と分散を求めよ。

(2) ${x_n}^2$ の平均を求めよ。

(3) 原点を中心とし，点 $(x_n,\ y_n)$ を通る円の面積 S の平均を求めよ。ただし，点 $(x_n,\ y_n) = (0,\ 0)$ のときは $S = 0$ とする。